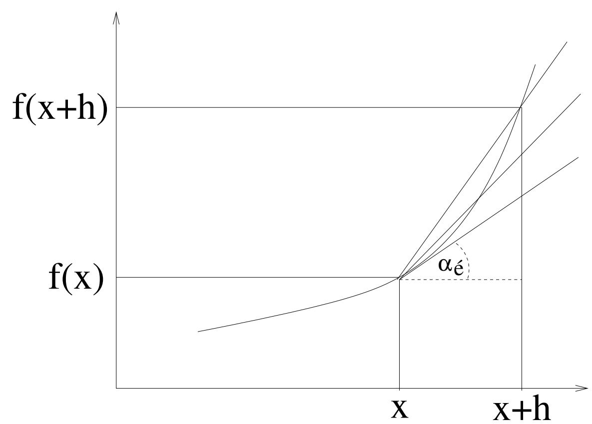
# 1. Deriválás

## 1.1. Elmélet

A derivált fogalom geometriai bevezetéséhez nézzük meg a következő ábrát:




Egy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény képe a síkon egy görbe. A görbe tetszőleges két pontját összekötő szakasz a szelő. Válasszunk ki egy pontot $(x)$ a görbén, majd rajzoljunk be az innen induló szelőket. Amint a szelő másik végpontja közelít a kiválasztott ponthoz, a szelő egyre közelebb kerül az érintőhöz. Fejezzük ki a behúzott szelők meredekségét, felhasználva az ábrán látható jelöléseket.

$$m_{sz}=\tan\alpha_{sz}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

A szelő $x+h$ pontjának az $x$ ponthoz való közelítését, a két pont közötti távolság csökkenését határesetben eltűnését a $\lim\limits_{h\to 0}$ formulával jelöljük. Definíció szerint egy függvény deriváltja egy pontban megadja az ahhoz a ponthoz húzott érintő meredekségét. Az ábra jelöléseit felhasználva a következő módon fejezhetjük ki az érintő meredekségét, azaz a deriváltat:

$$m_é=\tan\alpha_é=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

Az érintő meredeksége megmutatja, hogy abban az adott pontban a függvény hogyan viselkedik. Ha a függvénynek az adott pontban szélsőértéke van, akkor a derivált értéke nulla, mert az érintő vízszintes, ha a függvény az adott pontban szigorúan monoton csökken (nő), akkor $f'(x)<0$ ($f'(x)>0$).

Egy $f(x)$ függvény legyen deriválható minden pontban. Ekkor $f'(x)$-en azt a függvényt értjük, amely tetszőleges pontban megadja az $f(x)$-hez abban a pontban húzott érintő meredekségét.

Mintapélda: $f(x)=x^2$ függvény deriváltja.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Többváltozós függvények (általános alakja $f(x,y,z,\ldots)$) esetén is beszélhetünk deriváltról. Ebben az esetben a derivált azt mutatja meg, hogy egy kiszemelt irányban hogyan változik a függvény. Technikailag ez azt jelenti, hogy a kiszemelt változón kívül az összes többit állandónak tételezzük fel és úgy járunk el, mintha csak egy változója lenne a függvényünknek. Ennek a jelölése és értelmezése ilyen alakban írható:

$$\frac{\partial f(x,y,z,\ldots)}{\partial x}=\frac{df(x,y=const,z=const,\ldots)}{dx}$$

## 1.2. Deriválási szabályok

Nincs szükség minden egyes függvénynél az elöző eljárást végigcsinálni, ugyanis nagyon sok függvényre elvégezték ezt a munkát. A legfontosabb alapfüggvények deriváltjait a következő táblázat tartalmazza:

$$[\text{const}]' = 0 \qquad [x^n]' = nx^{n-1}$$
$$[\ln x]' = \frac{1}{x} \qquad [e^x]' = e^x$$
$$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a} \qquad [a^x]' = a^x \ln a$$
$$[\sin x]' = \cos x \qquad [\cos x]' = -\sin x$$
$$[\sinh x]' = \cosh x \qquad [\cosh x]' = \sinh x$$

Az utolsó két függvény nem nagyon ismert, pedig gyakran előfordulnak fizikával kapcsolatos feladatokban, problémákban. Definiciójuk:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

A függvények általában több elemi függvény kapcsolataként állnak elő. Tekintsük át a deriválás hatását ilyen függvényekre.

$$[cf(x)]' = c\,[f(x)]' \qquad [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$
$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad [f\,(g(x))]' = f'\,(g(x))\,g'(x)$$
$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \qquad \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

## 1.3. Kidolgozott példák

1. $f(x) = x^2 \sin x$, a szorzat függvény deriválási szabálya szerint:

$$f'(x) = [x^2]' \sin x + x^2 [\sin x]' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

2. $f(x) = \tan x$, a törtfüggvényre vonatkozó szabály szerint:

$$f'(x) = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{[\sin x]' \cos x - \sin x [\cos x]'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3. $f(x) = \arcsin x$, az inverz függvényre vonatkozó szabály szerint:

$$f'(x) = [\sin^{-1} x]' = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

4. $f(x) = \sqrt{x^3+1}$, az összetett függvényre vonatkozó szabály szerint:

$$f'(x) = \left[(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\left[x^3+1\right]' = \frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}3x^2$$

5. $f(x,y) = x^2\sin y + y^3\cos x$, ez egy kétváltozós függvény, deriváljuk parciálisan mind a kettő változója szerint.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{df(x, y = const)}{dx} = [x^2]'\sin y + y^3[\cos x]' = 2x\sin y - y^3\sin x$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{df(x = const, y)}{dy} = x^2[\sin y]' + [y^3]'\cos x = x^2\cos y + 3y^2\cos x$$

## 1.4. Feladatok

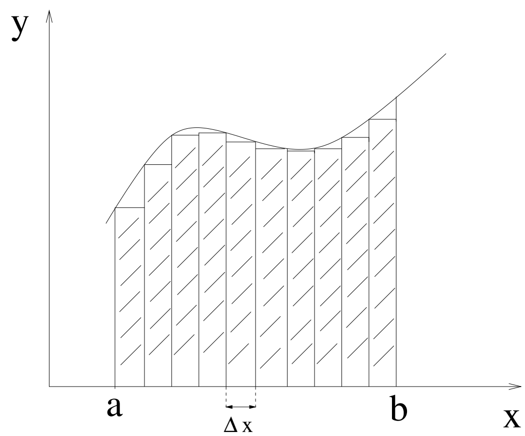
Ebben a témában gyakorlópéldának szinte bármi jó, ami az ember eszébe jut. Azért álljon itt kedvcsinálónak néhány. Deriváld a következő függvényeket!

| | | |
|---|---|---|
| $(a)\quad f(x) = \sqrt{x}$ | $(b)\quad f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ | $(c)\quad f(x) = x^3 - x^{-2} + 6$ |
| $(d)\quad f(x) = \sin x\cos x$ | $(e)\quad f(x) = e^x$ | $(f)\quad f(x) = \sin x \sinh x$ |
| $(g)\quad f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ | $(h)\quad f(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}}+2x}{sinx}$ | $(i)\quad f(x) = \frac{\cos x\ln x + x^2}{x^3 - \tan x}$ |
| $(j)\quad f(x) = (x^2-3)^5$ | $(k)\quad f(x) = \sqrt[3]{x^3+2x}$ | $(l)\quad f(x) = e^{x^4-3x^2}$ |
| $(m)\quad f(x) = \arctan x$ | $(n)\quad f(x) = \arccos x$ | $(o)\quad f(x) = (e^{x^3-1}\ln(x^2+3)+6)^7$ |

# 2. Integrálás

## 2.1. Elmélet

Az integrál fogalmának megértéséhez induljunk ki újra a geometriai értelmezésből. Nézzük a következő ábrát:




A probléma megfogalmazása a következő: Adott egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyet ábrázolva a síkon egy görbét kapunk, számítsuk ki a függvény görbéje és az x tengely közötti területet valamely $x = a$ ponttól $x = b$ pontig. A probléma megoldásához közelítsük a kiszámítandó területet olyan téglalapok összegével, melyeknek szélessége $\Delta x$, magassága pedig a függvény legkisebb értéke ezen a kicsiny intervallumon belül. Ezzel megkaptuk a függvény alatti terület alsó közelítő összegét. Látható, hogy ha a felosztást finomítjuk, akkor a közelítő összeg egyre pontosabban visszaadja az eredményt. Ha végtelenül sok intervallumra osztjuk fel az $[a, b]$ intervallumot, akkor pontosan megkapjuk a kérdéses területet. Ezt a következő módon jelöljük:

$$\text{Terület} = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ennek a műveletnek a neve határozott integrál.

Milyen tulajdonságai vannak? Ha a terület az $x$ tengely felett van akkor pozitív, ha alatta akkor negatív előjelű. Ha kiszámítjuk a területet $[a, b]$, $[b, c]$ és $[a, c]$ intervallumon, akkor első kettő terület összege kiadja a harmadikat:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ha az integrál intervallumának eleje és vége ugyanaz, akkor nullát kapunk (nincs közrezárt terület):

$$\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Végül, ha felcseréljük az integrálási határokat, akkor ellenkező előjelű területet kapunk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ha létezik olyan $F(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre igaz, hogy:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

akkor $F(x)$-et a $f(x)$ függvény primitív függvényének hívjuk. A primitív függvény alakja egy konstans additív tagig határozatlan, mert a különbség képzése során az additív tag kiesik. Határozatlan integrál fogalmán a primitív függvény megkeresését értjük, jelölése a határozott integrál jelölésétől csupán abban különbözik, hogy nem írunk ki határokat:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Bizonyítható (lásd analízis előadás *Newton-Leibniz tétele*), hogy ha $F(x)$ a $f(x)$ függvény primitív függvénye, akkor $F(x)$ deriváltja éppen $f(x)$.

$$F'(x) = f(x)$$

## 2.2. Integrálási szabályok

*Newton-Leibniz tétel* felhasználásával, egyszerűbb függvények esetén könnyen visszakereshetjük a primitív függvényt, íme egy táblázat a legfontosabb alapfüggvények integráljáról:

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos x + C$$

Az összetett függvények integráljának kiszámítása nem egyszerű feladat, a deriválással ellentétben nem minden esetben tehető meg analitikusan. Annyira azért nem reménytelen a helyzet, mert most is érvényes néhány általános formula, melyek használatával nagyon sok integrál eredménye zárt alakban felírható.

$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\int f(x)\pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{ahol} \quad y = g(x) \tag{4}$$

## 2.3. Kidolgozott példák és gyakran használt módszerek

Most alkalmazzuk az előző szabályokat és néhány speciális esetet részletesebben is megvizsgálunk:

1. $\int_{-1}^{2} x^3 + 2x^{-2} + 3\sqrt{x} + 6\,\mathrm{d}x = ?$ Összegfüggvény határozott integrálját kell kiszámolni, melyet tagonként számolhatunk (2. formula). Az összes tag polinom melyekre alkalmazva a megfelelő szabályt:

$$\int\limits_1^2 x^3 + 2x^{-2} + 3\sqrt{x} + 6\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_1^2 x^3\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 2x^{-2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 3x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 6\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 + \left[\frac{2x^{-1}}{1}\right]_1^2 + \left[\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 + [6x]_1^2 = \frac{27}{4} + 4\sqrt{2}$$

2. $\int_0^{2\pi} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x = ?$ Ez egy szorzatfüggvény, ezért alkalmazzuk rá a parciális integrálás szabályát (3. formula). A probléma az, hogy melyik függvényt válasszuk deriváltnak? A polinom foka a deriválással csökken, így a szabály többszöri alkalmazásával eltűnhet az integrálandó függvényből, ezért következőképp választunk:

$$f'(x) = \sin x \qquad f(x) = -\cos x$$
$$g(x) = x^2 \qquad g'(x) = 2x$$

$$\int\limits_0^{2\pi} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\cos x\right]_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} 2x(-\cos x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -4\pi^2 + 2\int\limits_0^{2\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x =$$

Újra alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát:

$$f'(x) = \cos x \qquad f(x) = \sin x$$
$$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$$

$$= -4\pi^2 + 2\int_0^{2\pi} x\cos x \,\mathrm{d}x = -4\pi^2 + 2\left[x\sin x\right]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x =$$

$$= -4\pi^2 - 2\int_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = -4\pi^2 - 2\left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = -4\pi^2$$

3. $\int \ln x \,\mathrm{d}x \ = ?$ Ez egy érdekes példa a szorzat függvények integrálására. Ugyanis egy olyan cselt kell alkalmazni, mellyel sokat találkozhatunk a matematika világában. Nevezetesen, ha egy kifejezést megszorzunk 1-gyel, akkor nem változtatjuk meg az értékét. Tekintsük szorzatfüggvénynek a logaritmust az előző értelemben, majd alkalmazzuk rá a parciális integrálás szabályát.

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int 1 \ln x \,\mathrm{d}x$$

A szabály alkalmazásákor a következő választást használjuk:

$$f'(x) = 1 \qquad f(x) = x$$
$$g(x) = \ln x \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$$
$$\int 1 \ln x \,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

4. $\int \frac{3x^2}{x^3+2} \,\mathrm{d}x = ?$ Ez a feladat a helyettesítéses integrál egyik speciális esete. A számlálóban lévő függvény a nevező deriváltja. A végeredmény a nevezőben lévő függvény logaritmusa, amiről deriválással könnyen meggyőződhetünk. Matematikai jelöléssel:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

A feladat megoldása ennek segítségével:

$$\int \frac{3x^2}{x^3+2} \,\mathrm{d}x = \ln\left(3x^2 + 2\right) + C$$

Az abszolútértéket itt elhagyhatjuk, mert a logaritmus argumentumában szereplő kifejezés minden $x$-re pozitív.

5. $\int 2x\left(x^2+1\right)^{32} \,\mathrm{d}x \ = ?$ Ez egy másik speciális esete a helyettesítéses integrálnak. A szorzat egyik tagja egy függvény valamilyen kitevőre emelve, a másik tagja pedig a függvény deriváltja. Az eredmény a függvényünk eggyel nagyobb kitevőn osztva az új kitevővel. Deriválás

segítségével meggyőződhetünk a szabály helyességéről. Matematikai jelöléssel:

$$\int f'(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int 2x\left(x^2+1\right)^{32}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(x^2+1\right)^{33}}{33} + C$$

6. $\int 6\cos\left(6x-7\right)\mathrm{d}x = ?$ Ez a feladat a helyettesítéses integrál alkalmazásával oldható meg (4. formula), ahol a helyettesítendő függvény elsőfokú kifejezés.

$$y = 6x - 7 \qquad \to \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6 \qquad \to \qquad \mathrm{d}y = 6\mathrm{d}x$$

Ezekkel a kifejezésekkel végezzük el a helyettesítéseket.

$$\int 6\cos\left(6x-7\right)\mathrm{d}x = \int \cos y\,\mathrm{d}y = \sin y + C = \sin\left(6x-7\right) + C$$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1}\,\mathrm{d}x = ?$ Az olyan függvények integrálásánál, amiben szerepel a következő négyzetgyökös kifejezés:$\sqrt{1-x^2}$. gyakran célravezető a következő helyettesítés:

$$x = \sin y \quad \to \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cos y \quad \to \quad \mathrm{d}x = \cos\left(y\right)\mathrm{d}y$$

Ezek segítségével:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos y}{\sqrt{1-\sin^2 y}+1}\,\mathrm{d}y$$

Első ránézésre talán bonyolítottuk a feladatot, de alkalmazva a következő trigonometrikus azonosságokat egyszerűsödik a példa.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad\qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Jelen esetben $2\alpha = y$:

$$\int \frac{\cos y}{\sqrt{1-\sin^2 y}+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\cos y}{\cos y + 1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2\cos^2\frac{y}{2} - 1}{2\cos^2\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int 1 - \frac{1}{2\cos^2\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y = y - \int \frac{1}{2\cos^2\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y$$

A $z = \frac{y}{2}$ helyettesítéssel:

$$y - \int \frac{1}{2\cos^2\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y = y - \int \frac{1}{\cos^2 z}\,\mathrm{d}z = y - \tan z + C =$$
$$= y - \tan\frac{y}{2} + C = \arcsin x - \tan\left(\frac{\arcsin x}{2}\right) + C$$

Számoljuk ki a $\int \frac{\cos y}{\cos y+1}\,\mathrm{d}y$ integrált egy másik helyettesítés segítségével. Ha olyan függvényt kell integrálni, melyben trigonometrikus kifejezések szerepelnek, és nem akarunk (tudunk) bűvészkedni a különböző azonosságokkal, akkor az esetek többségében segít a következő módszer:

$$t = \tan\frac{y}{2} \quad \text{ekkor} \quad \sin y = \frac{2t}{t^2+1} \quad \text{és} \quad \cos y = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

A derivált és $\mathrm{d}y$ kifejezése pedig:

$$y = 2\arctan t \quad \to \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{t^2+1} \quad \to \quad \mathrm{d}y = \frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

Az integrál a következőképp alakul.

$$\int \frac{\cos y}{\cos y+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\frac{1-t^2}{t+1}}{\frac{1-t^2}{t+1}+1}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int -\frac{t^2+1}{t^2+1} + \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -t + 2\arctan t + C = -\tan\frac{y}{2} + y + C$$

Ez megegyezik az előző módon számított eredménnyel.

8. $\int \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x =$? Először hozzuk ki a négyzetgyök alól a 4-t, utánna egy gyakori helyettesítéses szabályt alkalmazunk.

$$\int \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \int 2\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$y = \frac{x}{2} \quad \to \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \quad \to \quad \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}y$$
$$2\int \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 4\int \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

Az integrandusz hasonlít az előző példában látott $\sqrt{1-x^2}$ kifejezéshez, csak most kivonás helyett összeadás szerepel a gyökjel alatt. Ilyenkor a következő helyettesítés a célravezető:

$$y = \sinh z \quad \to \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \cosh z \quad \to \quad \mathrm{d}y = \cosh(z)\mathrm{d}z$$

Ennek segítségével az integrálunk a következőképp alakul.

$$4\int \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y = 4\int \sqrt{1+\sinh^2 z}\cosh z\,\mathrm{d}z = 4\int \cosh^2 z\,\mathrm{d}z =$$
$$= 4\int \cosh^2 z\,\mathrm{d}z = 4\int \frac{\cosh(2z)+1}{2}\,\mathrm{d}z = \sinh(2z) + 2z + C = 2y\sqrt{1+y^2} + \operatorname{arsinh} y + C$$

9. $\int \sin x \sinh x \, \mathrm{d}x =$? Utolsó kidolgozott példánk a parciális integrálás speciális esete. A szorzat mindkét tagja olyan, hogy többször deriválva vagy integrálva önmagát kapjuk. Végezzük el a parciális integrálást kétszer egymás után.

$$f'(x) = \sin x \qquad f(x) = -\cos x$$
$$g(x) = \sinh x \qquad g'(x) = \cosh x$$

$$\int \sin x \sinh x \, \mathrm{d}x = -\cos x \sinh x - \int -\cos x \cosh x \, \mathrm{d}x = -\cos x \sinh x + \int \cos x \cosh x \, \mathrm{d}x$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f(x) = \sin x$$
$$g(x) = \cosh x \qquad g'(x) = \sinh x$$

$$-\cos x \sinh x + \int \cos x \cosh x \, \mathrm{d}x = -\cos x \sinh x + \sin x \cosh x - \int \sin x \sinh x \, \mathrm{d}x$$

Írjuk fel újra, hogy milyen kifejezésből indultunk és mihez érkeztünk:

$$\int \sin x \sinh x \, \mathrm{d}x = -\cos x \sinh x + \sin x \cosh x - \int \sin x \sinh x \, \mathrm{d}x$$

Az egyenlet bal oldalán álló kifejezés megtalálható a jobb oldalon is, így egy kicsit átrendezve az egyenletet és kifejezve a keresett integrált a következőt kapjuk:

$$\int \sin x \sinh x \, \mathrm{d}x = \frac{-\cos x \sinh x + \sin x \cosh x}{2} + C$$

## 2.4. Feladatok

Számold ki a következő határozott és határozatlan integrálokat! Ne feledkezz meg arról, hogy deriválással ellenőrizheted a megoldást!

$$\int_{-1}^{5} x^3 - 2x^{-2} + e^x \,\mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x \qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$

$$\int_{0}^{\pi} x \cos x \,\mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{1} x^2 e^x \,\mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{1} \sin\left(x\pi - \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}x$$

$$\int x \ln x \,\mathrm{d}x \qquad \int \ln^2 x \,\mathrm{d}x \qquad \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x}{3x^2-2} \,\mathrm{d}x \qquad \int \tan x \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\cos x}{6 \sin x + 1} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + 3} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{1+e^{-x}} \,\mathrm{d}x$$

$$\int 4x^3 \left(x^4 - 3\right)^4 \,\mathrm{d}x \qquad \int 3x^2 \sqrt{x^3+2} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^3}{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x$$

$$\int \ln(3x-4) \,\mathrm{d}x \qquad \int \sin(2x-2)) \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{\cos^2(4x+1)} \,\mathrm{d}x$$

$$\int x\sqrt{x+2} \,\mathrm{d}x \qquad \int \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{3-x^2}} \,\mathrm{d}x$$

$$\int x e^{-x^2} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\cos x - 1} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

# 3. Vektorok

## 3.1. Vektor fogalma, alapműveletek

Azokat a mennyiségeket, amelyek egy iránnyal és egy mérőszámmal adhatók meg vektoroknak nevezzük. Ilyen például a sebesség, gyorsulás, erő... A vektorok szemléltetésére geometriai módot szoktak használni. Egy nyíllal szokták jelölni a vektort, melynek hossza a vektor nagyságát az iránya a vektor irányát mutatja. A vektort ebben az értelemben kétszer aláhúzott betűvel jelöljük, pl. $\underline{\underline{a}}$. Úgy is felfoghatjuk, hogy a vektor egy olyan utasítás, ami megmondja nekünk, hogy mennyit és milyen irányban mozduljunk egy adott térben. A vektor hosszának, az abszolútértékének jelölése: $\left|\underline{\underline{a}}\right| = a$. A nulla hosszúságú vektort nullvektornak hívjuk.

Két vektor összegén egy olyan harmadik vektort értünk, amely az első vektor kezdetétől a másik vektor végéig mutat. Adott $\underline{\underline{a}}$ és $\underline{\underline{b}}$ vektor esetén a:

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}$$

összeget geometriailag úgy képzelhetjük el, hogy a $\underline{\underline{c}}$ vektor az $\underline{\underline{a}}$ és $\underline{\underline{b}}$ vektorok által kifeszített paralelogramma átlója. Több vektor esetén az összeg az első vektor elejétől az utolsó vektor végéig mutat.

A vektor ellentetjén az azonos nagyságú, de ellentétes irányú vektort értjük, jelölése: $-\underline{\underline{a}}$. Egy vektor és annak ellentetjének összege a nullvektort adja eredményül. Ennek segítségével két különbségét úgy képezzük, hogy az első vektorhoz hozzáadjuk a második ellentetjét:

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} - \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{a}} + \left(-\underline{\underline{b}}\right)$$

Egy vektort úgy szorzunk meg egy számmal, hogy nagyságát megszorozzuk az adott számmal és a kapott vektor iránya a szorzó szám előjelétől függően vagy azonos (pozitív) vagy ellentétes (negatív) az eredeti vektorhoz képest. Legyen $\underline{\underline{b}} = \alpha\,\underline{\underline{a}}$, ekkor $\underline{\underline{b}}$ egy olyan vektor, amely $\underline{\underline{a}}$-val egyirányú, ha $\alpha$ előjele pozitív és ellentétes, ha $\alpha$ előjele negatív, a nagysága pedig $b = |\alpha|\,a$. Két vektor összege és számmal való szorzása disztributív művelet:

$$\alpha\left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}\right) = \alpha\,\underline{\underline{a}} + \alpha\,\underline{\underline{b}}$$

Vektorok *lineáris kombinációján* értjük a számmal való szorzás és a vektorok közötti összeadás során kapott kifejezéseket. Például $\underline{\underline{a}}$ és $\underline{\underline{b}}$ vektorok lineáris kombinációja az a $\underline{\underline{c}}$ vektor, amely előáll a következő alakban: $\underline{\underline{c}} = \alpha\,\underline{\underline{a}} + \beta\,\underline{\underline{b}}$.

Két vektor skaláris szorzatán egy olyan számot értünk, melyet a következőképp számítunk ki:

$$\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} = ab\cos\alpha$$

Ez a szorzat a fizikában gyakran előfordul (például munka...). A skaláris szorzat két vektorhoz egy számot rendel, az asszociativitás nem igaz rá, ezért ki kell tenni a zárójeleket:

$$\left(\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\right)\underline{\underline{c}} \neq \underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\right)$$

A skaláris szorzat kommutatív, azaz két vektor skaláris szorzata nem függ a sorrendtől. A vektorok közötti összeadás és a skaláris szorzás között érvényes a disztributivitás.

$$\left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}\right)\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}} + \underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}$$

Ha két vektor merőleges egymásra (ortogonális), akkor skaláris szorzatuk nulla. Fordítva is igaz, ha két vektor skaláris szorzata nulla, akkor merőlegesek egymásra (ortogonálisak), vagy az egyik vektor a nullvektor, de annak iránya úgyis tetszőleges. Tetszőlegs vektor saját magával vett skaláris szorzata megadja a hosszának négyzetét $\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{a}} = a^2$.

Valamely $\underline{\underline{v}}$ sebességgel mozgó töltésre $\underline{\underline{B}}$ mágneses térben olyan $\underline{\underline{F}}$ erő hat, melynek iránya merőleges $\underline{\underline{v}}$-re és $\underline{\underline{B}}$-re ($\underline{\underline{v}}$ és $\underline{\underline{B}}$ által kifeszített síkra), nagysága pedig $vB\sin\alpha$-val arányos. A vektoriális szorzat segítségével a Lorenz erőt a következő alakban írhatjuk:

$$\underline{\underline{F}} = q\,\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{B}}$$

Legyen $\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}$, ekkor $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ és $\underline{\underline{c}}$ jobbsodrású rendszert alkot, azaz a jobb kezünk hüvelyk, mutató és középső ujjával (ebben a sorrendben) tudjuk őket fedésbe hozni. A vektoriális szorzat nem asszociatív és nem kommutatív. A definicióból következik, hogy:

$$\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}} = -\,\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{a}}$$

A vektorok összeadására és vektoriális szorzására is érvényes a disztributivitás.

$$\left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}\right) \times \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{c}} + \underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}$$

Az $\underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}\right)$ szorzatot hármas vegyes szorzatnak nevezik. Ha a három vektor egy síkban fekszik (vagy az egyik a nullvektor), akkor a vegyes szorzatuk nullát ad eredményül. Geometriailag a vegyes szorzat, a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatát adja. A vegyes szorzat előjele megmutatja, hogy a három vektor jobb- (pozitív előjel) vagy balsodrású rendszert (negatív előjel) alkot. Geometriai megfontolásokból igaz a következő két egyenlőség:

$$\underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}\right) = \underline{\underline{c}}\left(\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}\right) = \underline{\underline{b}}\left(\underline{\underline{c}} \times \underline{\underline{a}}\right)$$
$$\underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}\right) = \left(\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}}\right)\underline{\underline{c}}$$

A hármas vegyes szorzatot ezen tulajdonságok miatt a következő formulával jelölik: $\underline{\underline{a}}\left(\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}\right) = \left(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}\right)$.

## 3.2. Bázis, koordináta

Legyen $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ és $\underline{\underline{c}}$ a tér három olyan vektora, melyekre igaz, hogy az

$$\alpha\,\underline{\underline{a}} + \beta\,\underline{\underline{b}} + \gamma\,\underline{\underline{c}} = 0$$

egyenletnek a triviális $\alpha = \beta = \gamma = 0$ megoldáson kívül nincs másik gyöke. Ekkor azt mondjuk, hogy a három vektor *lineárisan független*. Síkban kettő, térben három lineárisan független vektort találhatunk, természetesen létezhetnek olyan terek is, ahol több lineárisan független vektor létezik. Lineárisan függőek a vektorok, ha létezik más megoldása is az előző egyenletnek, ilyenkor az egyik vektort kifejezhetjük a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Adott valamilyen *vektortér*, azaz olyan tér, ahol értelmezve vannak valamilyen vektorok összeadással, számmal való szorzással és valamilyen skaláris szorzattal. Ha meghatározunk annyi lineárisan független vektort, melyekből lineáris kombinációként a tér összes vektora előállítható, akkor ezeket a vektorokat *bázisnak* hívjuk. A bázisvektorok számát az adott vektortér dimenziójának nevezzük.

Síkban kettő, térben három lineárisan független vektor kell egy bázis kialakításához. Legyen $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ és $\underline{\underline{c}}$ egy bázis a térben. Ekkor tetszőleges $\underline{\underline{x}}$ vektorra definíció szerint igaz, hogy $\underline{\underline{x}} = \alpha\,\underline{\underline{a}} + \beta\,\underline{\underline{b}} + \gamma\,\underline{\underline{c}}$ és a felbontás egyértelmű, tehát $\alpha$, $\beta$ és $\gamma$ számok egyértelműen jellemzik az $\underline{\underline{x}}$ vektort. Az $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ számhármast az $\underline{\underline{x}}$ vektor *koordinátáinak* nevezzük az $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$ vektorok által kifeszített *koordináta rendszerben*.

Egy bázist *ortogonálisnak* nevezünk, ha vektorai egymásra páronként merőlegesek, azaz skaláris szorzatuk nullát ad eredményül.

Ha egy ortogonális bázis minden vektora egységnyi hosszú, akkor *ortonormált* bázisról beszélünk. A vektorok leírása ilyen bázisban általában egyszerű és könnyen követhető, a továbbiakban ezzel foglalkozunk részletesen. Legyen $\underline{\underline{e}}^{(1)}$, $\underline{\underline{e}}^{(2)}$, $\underline{\underline{e}}^{(3)}$ egy ortonormált bázis a térben, ekkor definíció szerint igazak a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned} e^{(1)} = e^{(2)} = e^{(3)} &= 1 \quad \text{egységnyi hosszúak} \\ \underline{\underline{e}}^{(1)}\,\underline{\underline{e}}^{(2)} = \underline{\underline{e}}^{(1)}\,\underline{\underline{e}}^{(3)} = \underline{\underline{e}}^{(2)}\,\underline{\underline{e}}^{(3)} &= 0 \quad \text{páronként merőlegesek} \end{aligned}$$

## 3.3. Reprezentáció, indexes írásmód

Legyen $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ és $\underline{\underline{c}}$ egy bázis a térben, amelyek kifeszítik a $K$ koordináta rendszert. Ekkor tetszőleges $\underline{\underline{x}}$ vektorra definíció szerint igaz, hogy $\underline{\underline{x}} = x_1\,\underline{\underline{a}} + x_2\,\underline{\underline{b}} + x_3\,\underline{\underline{c}}$. Az $x_1$, $x_2$ és $x_3$ koordinátákat, mint számhármast, az $\underline{\underline{x}}$ vektor $K$ koordináta rendszerbeni reprezentációjának nevezzük. Jelölése: $\underline{\underline{x}} = x_1, x_2, x_3$.

Adott egy ortonormált bázis. Ekkor egy tetszőleges $\underline{\underline{a}}$ vektor a következő alakban írható fel:

$$\underline{\underline{a}} = a_1\,\underline{\underline{e}}^{(1)} + a_2\,\underline{\underline{e}}^{(2)} + a_3\,\underline{\underline{e}}^{(3)} = \sum_{i=1}^{3} a_i\,\underline{\underline{e}}^{(i)}$$

Szorozzuk be mindkét oldalt $\underline{\underline{e}}^{j}$-vel, ahol $i = 1, 2, 3$ lehet. Mivel a bázis ortonormált, ezért a jobb oldalon csak az a tag nem nulla, ahol az azonos bázisvektorral szorozzuk, ami viszont éppen egyet ad eredményül, így:

$$\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{e}}^{(j)} = \sum_{i=1}^{3} a_i\,\underline{\underline{e}}^{(i)}\,\underline{\underline{e}}^{(j)} = a_j$$

Tehát egy vektor koordinátáit úgy kapjuk meg, hogy skalárisan összeszorozzuk a megfelelő bázisvektorokkal. Ennek megfelelően a bázisvektorok reprezentációi:

$$\underline{\underline{e}}^{(1)} = 1, 0, 0 \qquad \underline{\underline{e}}^{(2)} = 0, 1, 0 \qquad \underline{\underline{e}}^{(3)} = 0, 0, 1$$

Nézzük meg hogyan reprezentálódnak a vektorok közötti műveletek. Legyen $\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{c}}$, írjuk ki a bázisvektorok segítségével az összeadást majd olvassuk le az eredményt.

$$\underline{\underline{a}} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \underline{\underline{b}} = (b_1, b_2, b_3) \qquad \underline{\underline{c}} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\underline{\underline{a}} = \sum_{i=1}^{3} a_i\,\underline{\underline{e}}^{(i)} \qquad \underline{\underline{b}} = \sum_{i=1}^{3} b_i\,\underline{\underline{e}}^{(i)} \qquad \underline{\underline{c}} = \sum_{i=1}^{3} c_i\,\underline{\underline{e}}^{(i)}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i\,\underline{\underline{e}}^{(i)} + \sum_{i=1}^{3} b_i\,\underline{\underline{e}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{3} (a_i + b_i)\,\underline{\underline{e}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{3} c_i\,\underline{\underline{e}}^{(i)}$$

$$\text{Tehát: } c_i = a_i + b_i \quad \text{más jelöléssel: } \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}$$

Tehát összeadás során a megfelelő koordináták összeadódnak. A $c_i = a_i + b_i$ formát indexes irásmódnak nevezzük, ekkor az indexben szereplő betű felveheti térben $1, 2, 3$ értékeket. Ezzel a jelöléssel megspóroljuk, hogy mind a három egyenletet ki kelljen írnunk.

Legyen $\underline{\underline{b}} = \lambda \, \underline{\underline{a}}$. Az előző gondolatmenetet végigcsinálva a következőt kapjuk.

$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\underline{\underline{a}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \quad \underline{\underline{b}} = \sum_{i=1}^{3} b_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)}$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{3} a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{3} \lambda a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{3} b_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)}$$

$$\text{Tehát: } b_i = \lambda a_i \quad \text{más jelöléssel: } \underline{b} = \lambda \, \underline{a}$$

Ilyenkor tehát minden koordinátát meg kell szorozni az adott számmal.

Skaláris szorzat reprezentálásához megint írjuk ki a bázisvektorok segítségével az $\underline{\underline{a}} \, \underline{\underline{b}}$ szorzatot.

$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\underline{\underline{a}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \quad \underline{\underline{b}} = \sum_{j=1}^{3} b_j \, \underline{\underline{e}}^{(i)}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \sum_{j=1}^{3} b_i \, \underline{\underline{e}}^{(j)} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \, \underline{\underline{e}}^{(j)}$$

Itt fontos, hogy a két vektor megfelelő komponenseit ne ugyanazzal a betűvel indexeljük, mert akkor nem kapnánk meg a tényleges szorzatot. Az utolsó szorzatnál megint a bázisvektorok szorzatát látjuk, amelyek csak akkor ad egyet, ha ugyanazokat a vektorokat szorozzuk össze, minden más esetben nulla az értéke.

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \, \underline{\underline{e}}^{(j)} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

Tehát skaláris szorzat a megfelelő koordináták szorzatainak az összege.

A vektoriális szorzat vizsgálatát kezdjük a bázisvektorok egymással vett vektoriális szorzatával. Mivel ortonormált bázisunk van, ezért a vektoriális szorzat definiciójából következik, hogy:

$$\underline{\underline{e}}^{(1)} \times \underline{\underline{e}}^{(2)} = \underline{\underline{e}}^{(3)} \qquad \underline{\underline{e}}^{(2)} \times \underline{\underline{e}}^{(3)} = \underline{\underline{e}}^{(1)} \qquad \underline{\underline{e}}^{(3)} \times \underline{\underline{e}}^{(1)} = \underline{\underline{e}}^{(2)}$$

$$\underline{\underline{e}}^{(2)} \times \underline{\underline{e}}^{(1)} = -\,\underline{\underline{e}}^{(3)} \qquad \underline{\underline{e}}^{(3)} \times \underline{\underline{e}}^{(2)} = -\,\underline{\underline{e}}^{(1)} \qquad \underline{\underline{e}}^{(1)} \times \underline{\underline{e}}^{(3)} = -\,\underline{\underline{e}}^{(2)}$$

minden más esetben nullát eredményez a szorzás.

$$\underline{a} = a_1, a_2, a_3 \quad \underline{b} = b_1, b_2, b_3 \quad \underline{c} = c_1, c_2, c_3$$

$$\underline{\underline{a}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \quad \underline{\underline{b}} = \sum_{j=1}^{3} b_j \, \underline{\underline{e}}^{(j)} \quad \underline{\underline{c}} = \sum_{k=1}^{3} c_k \, \underline{\underline{e}}^{(k)}$$

$$\underline{\underline{c}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \times \sum_{i=1}^{3} b_i \, \underline{\underline{e}}^{(i)} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \, \underline{\underline{e}}^{(i)} \times \underline{\underline{e}}^{(j)}$$

Részeletesen kiírva a koordinátákat a következő formulát kapjuk:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_2b_1 - a_1b_2 \end{pmatrix}$$

## 3.4. Kidolgozott feladatok

Adott három vektor reprezentációja egy ortonormált bázisban:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Számoljuk ki a következő kifejezéseket:

$$\underline{a}\;\underline{b} \qquad (3\,\underline{a} - \underline{b}\,)\;\underline{c} \qquad \underline{a} \times (\,\underline{b} + 2\,\underline{c}\,)$$

2. Mekkora szöget zár be a $\underline{b}$ és a $\underline{c}$ vektor?

1. Vegyük sorra a kifejezéseket.

$$\underline{a}\;\underline{b} = a_ib_i = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 0$$

Tehát a két vektor merőleges egymásra.
A $(3\,\underline{a} - \underline{b}\,)\;\underline{c}$ kifejezésnél először a zárójelben lévő tagot számoljuk ki.

$$3\,\underline{a} - \underline{b} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3+1 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Most már könnyen elvégezhetjük a skaláris szorzást.

$$(3\,\underline{a} - \underline{b}\,)\;\underline{c} = (3\,\underline{a} - \underline{b}\,)_i\,c_i = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 = -6$$

A harmadik kifejezésnél szintén a zárójeles taggal kell kezdeni.

$$\underline{b} + 2\,\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A vektoriális szorzat kiszámításának szabálya:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_2b_1 - a_1b_2 \end{pmatrix}$$

Tehát ezt alkalmazva a következőt kapjuk:

$$\underline{a} \times (\,\underline{b} + 2\,\underline{c}\,) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 - 0 \cdot (-5) \\ 0 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 5 - 1 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2. Két vektor hajlászögének meghatározására, a skaláris szorzat két kiszámítási módja ad lehetőséget.

$$\underline{b}\ \underline{c} = b_i c_i = bc\cos\alpha$$

Ahol $b$ és $c$ a két vektor hosszát, $\alpha$ pedig a közrezárt szöget jelenti.

$$b_i c_i = 2 + 2 + 2 = 6$$
$$b = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6} \quad c = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$\cos\alpha = \frac{b_i c_i}{bc} = \frac{6}{3\sqrt{6}} \quad \rightarrow \quad \alpha = 35.3^\circ$$

## 3.5. Feladatok

Egy koordináta rendszerben adottak a következő vektorok reprezentációi:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

1. Számold ki a hat vektor közül két tetszőlegesnek a skaláris szorzatát!
2. Számold ki a hat vektor közül két tetszőlegesnek a vektoriális szorzatát!
3. Számold ki a hat vektor közül két tetszőlegesnek a közrezárt szögét!
4. Számold ki a hat vektor közül három tetszőlegesnek a hármas vegyes szorzatát!